

Zur Rissentwicklung und neuartige Tragmodelle von Stahlbetontragwerken ohne Stegbewehrung unter Einzellasten in Wechselwirkung mit Endauflagern

von Prof. Dr.-Ing. Richard Rojek

1. Stadien der Stegrissententwicklung bei Einzellasten in Wechselwirkung mit Endauflagern

Bei Betrachtungen für den Zustand I konnte in [1] mit Hilfe einer Untersuchung über das Minimum der Formänderungsarbeit an Hand eines vereinfachten Tragmodells festgestellt werden, dass sich bei Einzellasten in der Nähe von Endauflagern ein Tragsystem einstellt, bei dem sich Spannungszustände nach der Biegetheorie und einem Sprengwerk überlagern. Diese Überlagerung stellt sich bei Stahlbetontragwerken im Zustand II in sehr ähnlicher Form ein.

Allerdings ist bei Tragwerken im Zustand II eine solch einfache Betrachtung über das Minimum der Formänderungsarbeiten nicht ohne weiteres möglich, da ein sehr wichtiger Einfluss nicht erfasst werden kann: Durch die Rissbildung werden nicht nur Zugdehnsteifigkeiten verändert, sondern es werden dadurch vielmehr auch Tragelemente, die sich im Zustand I einstellen, außer Kraft gesetzt. Das anschaulichste Beispiel bilden hierfür die Stegzugspannungen, die nach der Biegetheorie wirksam sind und durch entsprechende Rissbildung unterbunden, bzw. umgelenkt werden. Es erscheint wenig Erfolg versprechend, derartige Einflüsse mit einem Rechenmodell abbilden zu wollen.

Obwohl Einzellasten in der Nähe von Endauflagern in der Praxis nicht all zu häufig vorkommen - und wenn, dann sind sie bei Stahlbetonkonstruktionen meist nennenswert von Gleichlasten überlagert - erhält dieser Fall der Überlagerung der Biegebeanspruchung mit der Tragwirkung eines Sprengwerks eine besondere Bedeutung, da diese Überlagerung bei zahlreichen Versuchen vorlag, ohne dass dies bei der Versuchsauswertung bislang berücksichtigt worden wäre.

Es stellt sich daher die Frage, ob aus den Rissbildern von Versuchskörpern die anteilige Tragwirkung von Sprengwerken im Falle von auflagernahen Einzellasten abgeleitet werden kann. In diesem Fall darf im Bereich zwischen Einzellast und Auflager nicht mehr davon ausgegangen werden, dass die Gesetzmäßigkeiten der Biegetheorie gelten; der gesamte Bereich muss als D-Bereich angesehen werden. Für den hier betrachteten Fall, dass die Einzellast in einem Abstand von $2 \cdot d < a \leq 6 \cdot d$ vom Auflager angreift, wird dieser Bereich als **D_{e-i}-Bereich** bezeichnet.

Tatsächlich ist es in vielen Fällen auf verblüffend einfache Art möglich, die anteilige Tragwirkung von Sprengwerken qualitativ nachzuweisen: Man muss nur auf die Abbildungen der Versuchskörper das entsprechende Sprengwerk zeichnen und schon kann man feststellen, dass in zahlreichen Fällen der kritische Stegriss zumindest abschnittsweise der geneigten Druckstrebe des Sprengwerks folgt, also mit ihr in Wechselwirkung steht.

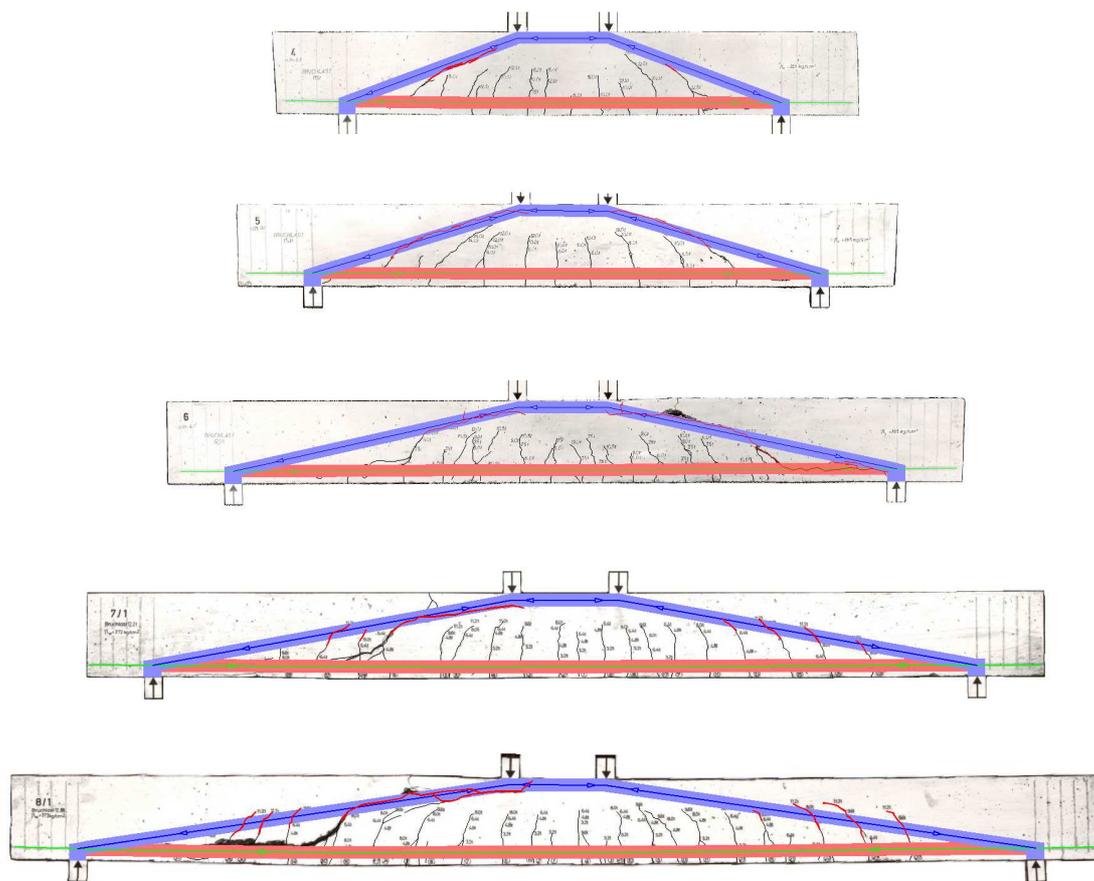


Bild 1: Versuchsbalken 4 bis 8/1 aus [2] mit überlagerten Sprengwerken

Für diese Vorgehensweise werden die Balken 4 bis 8/1 von *Leonhardt* und *Walther* verwendet, die in [2] veröffentlicht wurden. Im *Bild 1* wurde ihnen jeweils das zugehörige Sprengwerk zeichnerisch überlagert. Es ist auf den ersten Blick zu sehen, dass der kritische Stegriss zumindest abschnittsweise mit der zugehörigen Druckstrebe des Sprengwerks zusammenfällt. In diesem Bereich wird also das Tragverhalten durch die Wechselwirkung der Einzellast mit dem Auflager in der Weise beeinflusst, dass sich dem Spannungszustand nach der Biegetheorie die Wirkung eines Sprengwerks überlagert.

Im Folgenden soll nun die Rissentwicklung in **D_{e-i} -Bereichen** an Hand der Balken 4 - 8/1 aus [2] nachvollzogen werden. Dabei kann die Entstehung des kritischen Stegrisses, analog zum Biegebereich, vgl. [3], in sieben klar abgrenzbare Stufen unterteilt werden, die im Folgenden als Zustand II.1_{e-i} bis Zustand II.7_{e-i} bezeichnet werden.

1.1 Zustand II.1_{e-i}

Der Zustand II.1_{e-i} kann sich bei Einzellasten, die in Wechselwirkung mit Endauflagern stehen, aus zwei unterschiedlichen Zwischenzuständen zusammensetzen, dem **Zustand II.1B_{e-i}** und dem **Zustand II.1D_{e-i}**, die folgendermaßen definiert werden:

Zustand II.1B_{e-i}: Im D_{e-i} -Bereich entstehen in Folge der Biegezug- und Zugbandbeanspruchung Risse in der Zugzone, die etwa rechtwinklig zum gezogenen Rand

verlaufen. Sie verringern den Querschnitt des Zuggewölbes, das im Zustand I einen Teil der Krafteinleitung sicherstellt.

Zustand II.1D_{e-i}: Zwischen Krafteinleitung und den Wurzeln der Biegerisse bilden sich in Folge der Krafteinleitung einer oder mehrere radiale Risse, die das Zuggewölbe der Krafteinleitung außer Kraft setzen.

Bei allen im *Bild 1* dargestellten Balken verlaufen die ersten Risse zunächst etwa rechtwinklig zum gezogenen Rand, sie entsprechen dem **Zustand II.1B_{e-i}**. Bei den Balken 4 und 5 ist gut erkennbar, dass die Risse weiter innen in eine etwa konzentrische Richtung einschwenken, die von den Spannungen in Folge der Krafteinleitung bestimmt wird. Abweichend von den übrigen genannten Balken hat sich hier also anschließend an den Zustand II.1B_{e-i} ein **Zustand II.1D_{e-i}** eingestellt. Die weitere Rissentwicklung wurde von diesem Unterschied allerdings nicht beeinflusst.

Stellvertretend für die gesamte Gruppe der hier diskutierten Balken, die den D_{e-i} -Bereich repräsentieren, wird die weitere Rissentwicklung im Folgenden am Beispiel des Balkens 6 aufgezeigt. Im *Bild 2* ist die linke Hälfte dieses Balkens wiedergegeben. Die im Bereich des kritischen Stegrisses befindlichen Biegerisse wurden mit „a“, „b“, „c“ und „d“ gekennzeichnet. Weiterhin sind in dem Bild die Rissabschnitte hervorgehoben, die dem **Zustand II.1_{e-i}** zuzuordnen sind. Sie entsprechen dem Zustand II.1B_{e-i}; allerdings entstehen die Riss auslösenden Zugspannungen nicht nur aus dem Biegemoment, sondern resultieren anteilig auch aus dem Zugband, das zu dem überlagerten Sprengwerk gehört.

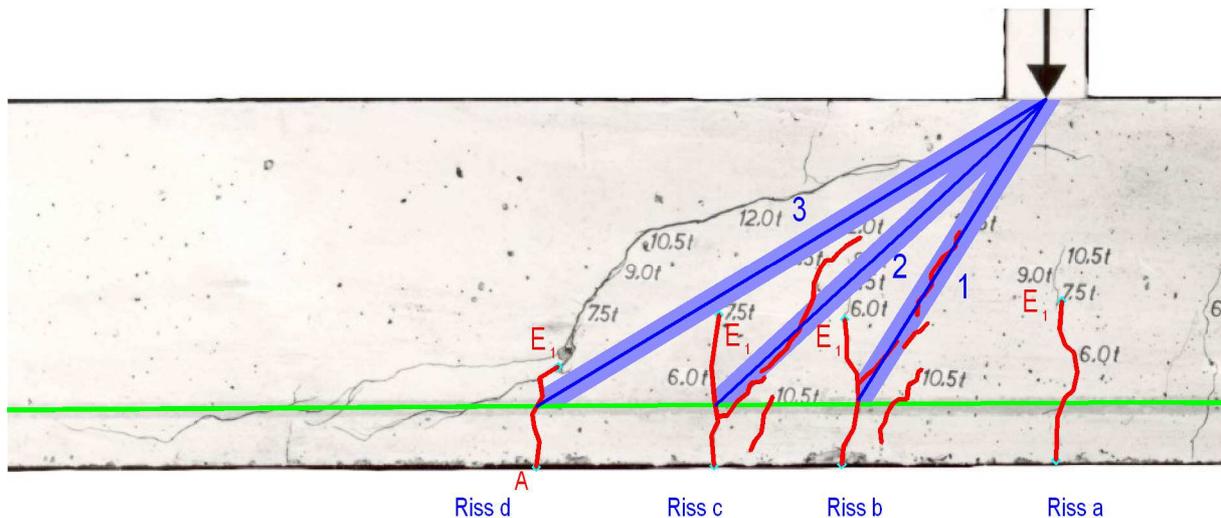


Bild 2: Ausschnitt aus Balken 6 aus [2]; Risse im Zustand II.1_{e-i}, mit zugehörigen Druckstreben

In diesem Zustand werden nach Untersuchungen für den Zustand I in [1] etwa 25 % der Belastung über ein Sprengwerk abgetragen und der weit aus größere Lastanteil über Biegetragwirkung. Allerdings gilt auch für den Lastanteil, der der Biegetragwirkung zuzuordnen ist, dass er in dem betrachteten Bereich keinen reinen Spannungszustand nach der Biegetheorie erzeugt - vielmehr wird diesem ein Spannungszustand durch die Einleitung der Last überlagert.

In Folge der Biege- und Zugbandrisse bis zu den vorläufigen Endpunkten E_1 wird das im Zustand I entstehende Zuggewölbe der Krafteinleitung bereits weitgehend außer Kraft gesetzt. Die eingeleitete Kraft stützt sich über die Druckstreben 1, 2 und 3 ab, die zu den Kreuzungspunkten der Risse „b“, „c“ und „d“ mit der Biegezugbewehrung führen, vgl.

Bild 2. Diese Druckstreben erhalten ein Gleichgewicht, indem sich jeweils links der Risse geneigte Zugstreben einstellen, die über die Wurzel des jeweils benachbarten Risses nach oben in die Druckzone geführt werden.

Interessanter Weise werden die Richtungen der Druckstreben 1 und 2 von Rissen nachgezeichnet; offensichtlich gibt es am Fußpunkt der Druckstreben so starke Druckspannungskonzentrationen, dass die zugehörigen Querspannungen zu Rissen führen, die sich weit in den Querschnitt hinein entwickeln. Die kurzen, geneigten Risse, die sich jeweils rechts der Risse „b“ und „c“ befinden und bezeichnender Weise nicht bis zum Balkenrand reichen, dürften gleichfalls dieser Wirkung zuzuschreiben sein. Leider gibt das Rissbild keinen Aufschluss darüber, ob diese Spaltrisse gleichzeitig oder nacheinander entstanden sind. Der obere Teil des zur Druckstrebe 2 gehörenden Spaltrisses vermittelt den Eindruck, dass diese Druckstrebe um den Riss „b“ umgelenkt wurde, nachdem sich dieser Riss bis zum Punkt E_{1b} entwickelt hatte. Nachdem sich dieser Spaltriss über die ganze Breite des Rissfeldes „b - c“ ausgedehnt hatte, konnte sich in diesem Rissfeld keine geneigte Zugstrebe mehr ausbilden, die für das Gleichgewicht der Druckstrebe 1 erforderlich ist. Die Wirksamkeit der Druckstrebe 1 wurde damit aufgehoben. Nachdem die Druckstrebe 1 also unwirksam wurde, dürfte die Druckstrebe 2 einen relativ großen Anteil derjenigen Last aufgenommen haben, die das System über Biegetragwirkung weiter leitete.

Es muss darauf hingewiesen werden, dass die Ausbildung der hier beschriebenen Spaltrisse eher eine Besonderheit des Balkens 6 darstellen, als dass sie als typische Erscheinung angesehen werden müssten.

Die Tatsache, dass die dargestellte Druckstrebe 3 keinen derartigen Spaltriss aufweist, erlaubt den Schluss, dass diese Druckstrebe in dieser Phase noch eine eher untergeordnete Rolle gespielt hat. Immerhin hat aber diese Druckstrebe offensichtlich bewirkt, dass sich der Riss „c“ nicht über den Punkt E_1 hinaus entwickeln konnte. Der oberste Teil des Spaltrisses im Rissfeld „b - c“ könnte auch der Druckstrebe 3 zugeordnet werden.

1.2 Zustand II.2_{e-i}

Der **Zustand II.2_{e-i}** wird folgendermaßen definiert:

Zustand II.2_{e-i}: Geneigte Zugstreben verursachen im Steg schräge Risse, die (ggf.) an den Wurzeln der Biegerisse ansetzen. Es bilden sich steiler geneigte Zugstreben aus, die an den neu entstandenen Risswurzeln vorbei führen.

Dabei weisen die Balken 4 und 5 gegenüber den Balken 6 bis 8/1 noch eine weitere Besonderheit auf, die durch die Hervorhebung der zum **Zustand II.2_{e-i}** gehörenden Risse im *Bild 3* leicht nachvollzogen werden kann: Diese Rissabschnitte haben sich jeweils in der linken Trägerhälfte aus den Stegzugspannungen ergeben, ohne dass in diesem Bereich bereits ein Biegeriss als Ausgangspunkt vorhanden gewesen wäre; die beiden Rissabschnitte beginnen daher erst innerhalb der Biegezugbewehrung und haben keine Verbindung zum unteren Rand. Die weitere Rissentwicklung wird dadurch jedoch nicht beeinflusst.

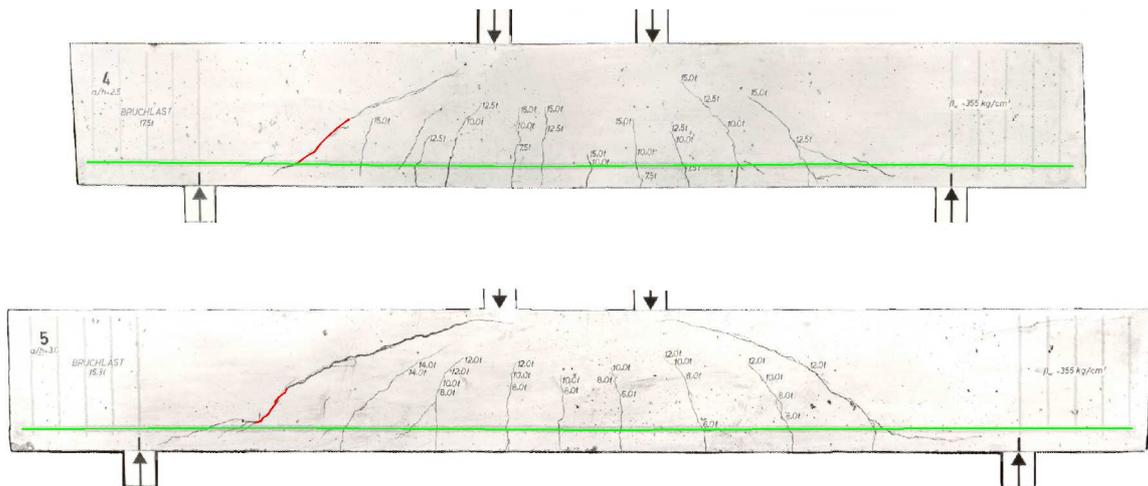


Bild 3: Balken 4 und 5 aus [2]; Risse im Zustand II.2_{e-i}

Am Beispiel des Balkens 6 zeigt sich, dass die für das Gleichgewicht der Druckstrebe 2, entsprechend Bild 2, erforderliche geneigte Zugstrebe im nächsten Schritt zur Verlängerung des Risses „d“ von E_1 bis zum Punkt E_2 führt, vgl. auch Bild 4. Damit ist der **Zustand II.2_{e-i}** erreicht. Die Stegzugstrebe führt nun oberhalb des Punktes E_2 vorbei und verursacht im nächsten Schritt die Verlängerung des kritischen Stegrisses (vermutlich) bis zum Punkt E_{3a} . Diese Zwischenstufe lässt sich zwar nicht direkt belegen, erscheint jedoch plausibel auf Grund der im Bild 4 dargestellten resultierenden Zugstrebenrichtung und des Knicks im Rissverlauf an der Stelle E_{3a} .

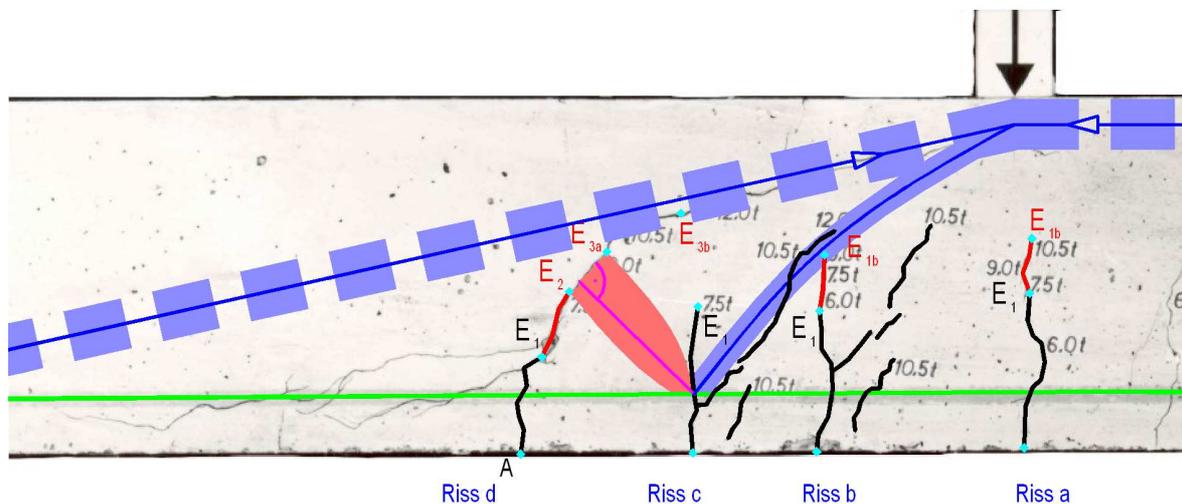


Bild 4: Ausschnitt aus Balken 6 aus [2]; Stegzugstrebe im Zustand II.2_{e-i}

1.3 Zustand II.3_{e-i}

Die Entstehung dieser Zwischenstufe liegt zum Einen daran, dass die hier diskutierten Versuchsbalken mit D_{e-i} -Bereichen vergleichsweise große Rissabstände aufweisen. Offensichtlich sind hier nur die Risse aus der Erstrissbildung vorhanden, die Rissbildung in Folge Biegung (und Zugbandwirkung des überlagerten Sprengwerks) ist noch nicht abgeschlossen, vgl. beispielsweise [4]. Die Rissfelder weisen also eine relativ große Breite auf. Dies hat zur Folge, dass der Stegrissabschnitt, der am Punkt E_2 ansetzt, nicht das gesamte Riss-

feld überbrückt. Die vor diesem Hintergrund entstandene Situation wird als **Zustand II.3a_{e-i}** bezeichnet.

In einer nächsten Zwischenstufe wird der kritische Stegriss bis zum Punkt E_{3b} verlängert und weist in diesem Abschnitt einen abrupten Richtungswechsel auf. In dieser Phase unterscheidet sich die Rissentwicklung eines D_{e-i} -Bereichs ganz entscheidend von derjenigen in einem B-Bereich, vgl. [2]:

Sobald der kritische Stegriss im vorliegenden Fall die geneigte Druckstrebe des Sprengwerks erreicht, folgt er im weiteren Verlauf zunächst nur noch der Richtung dieser geneigten Druckstrebe.

Es hat sich nun der **Zustand II.3b_{e-i}** eingestellt, der gekennzeichnet ist durch die Entwicklung des kritischen Stegrisses bis zum Punkt E_{3b} . Wenn dieser Zustand erreicht ist, kann im Rissfeld „c - d“ keine Stegzugstrebe mehr übertragen werden, wodurch zwangsweise auch die Druckstrebe 2 ausgeschaltet wird. Da im vorliegenden Fall in dieser Situation auch die Druckstrebe 1 nicht mehr wirksam ist, kann der Bereich unterhalb des kritischen Stegrisses nur noch die Druckstrebe 3 aktivieren.

Darüber hinaus gibt es noch einen anderen, ganz erheblichen Unterschied zwischen D_{e-i} -Bereichen und B-Bereichen. Wie die in [2] und [3] vorgestellten Betrachtungen zeigen, entspricht in B-Bereichen die Vertikalkomponente der Stegzugstrebe der Größe der halben Querkraft. Im vorliegenden Fall muss jedoch die Stegzugstrebe das Gleichgewicht bilden für die gesamte Querkraft, die über Biegung abgetragen wird. Nach den Untersuchungen, die in [1] - vgl. auch [7] - für den Zustand I durchgeführt wurden, kann dieser Anteil mit ca. 75 % der Gesamtlast veranschlagt werden, da ca. 25 % der Einzellast über das Sprengwerkssystem direkt zum Auflager abgetragen werden. Daraus kann überschlägig folgendes Verhältnis abgeleitet werden:

Bei gleicher Querkraft können die Stegzugstreben im D_{e-i} -Bereich ca. 50 % stärker sein als im B-Bereich!

Der **Zustand II.3_{e-i}** wird somit folgendermaßen definiert:

Zustand II.3_{e-i}: Die steiler geneigten Zugstreben verursachen einen weiteren Rissabschnitt, der flacher geneigt ist als derjenige, der im Zustand II.2_i entstanden ist. Es entsteht ein polygonal oder auch ausgerundet verlaufender Riss, der das betroffene Rissfeld vollständig überbrückt und dadurch außer Kraft setzt.

1.4 **Zustand II.4_{e-i} und Zustand II.5_{e-i}**

Der kritische Stegriss entwickelt sich nun weiter in Richtung der geneigten Stegdruckstrebe des Sprengwerks zum Kreuzungspunkt der eingeleiteten Kraft mit dem randparallelen Druckgurt. Dieser weiteren Rissentwicklung liegen nunmehr keine geneigten Stegzugstreben mehr zu Grunde. Ursache sind lediglich die Querzugspannungen der geneigten Stegdruckstrebe des Sprengwerks sowie eine Hebelwirkung der Druckstrebe 3. Obwohl die physikalischen Hintergründe der Rissentwicklung unterschiedlich sind, kann auch hier analog zu den B-Bereichen ein **Zustand II.4_{e-i}** definiert werden, bei dem der kritische Stegriss das zweite Rissfeld (hier: Rissfeld „b - c“) überbrückt und weiterhin ein **Zustand II.5_{e-i}**, bei dem der kritische Stegriss vorläufig seinen Endpunkt findet.

Damit lautet die Definition der **Zustände II.4_{e-i} und II.5_{e-i}**:

Zustand II.4_{e-i}: Der mehrteilige, geknickt oder ausgerundet verlaufende, kritische Stegriss überbrückt zwei Rissfelder, wobei alle Abschnitte des Stegrisses gegenüber dem gedrückten Rand geneigt sind.

Zustand II.5_{e-i}: Der mehrteilige, geknickt oder ausgerundet verlaufende, kritische Stegriss wird länger und überbrückt nun drei oder mehrere Rissfelder. In den folgenden Zuständen kann er sich sogar über den Einleitungspunkt der Einzellast hinweg fortsetzen und verläuft dann parallel zum gedrückten Rand.

1.5 Zustand II.6_{e-i}

Der **Zustand II.6_{e-i}** ist zunächst dadurch gekennzeichnet, dass die für das Gleichgewicht der Druckstrebe 3 erforderliche Zugstrebe T_{w6a} (links des Risses „d“, vgl. *Bild 5*) wirksam ist. Wenn diese vom Zuggurt trotz der versteifenden Wirkung der Biegezugbewehrung nicht mehr in den Steg geleitet werden kann, verlagert das System die Stegzugstrebe mit Hilfe der Biegesteifigkeit des Verbundquerschnittes des Zuggurtes in Richtung Auflager, wodurch sich zunächst die Stegzugstrebe T_{w6b} und anschließend eine progressiv fortschreitende Rissbildung einstellt. Aus der Neigung des ersten Risses dieser Rissfolge beim Balken 6 kann - wie bei anderen Beispielen auch - abgelesen werden, dass die Stegzugstrebe eine Neigung von etwa 60° gegenüber der Balkenachse aufweist.

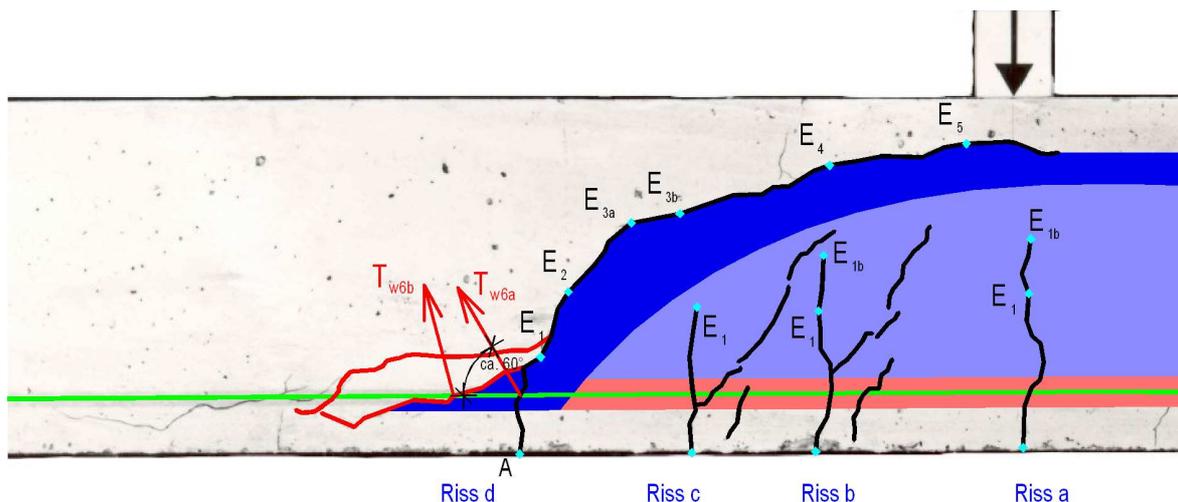


Bild 5: Ausschnitt aus Balken 6 aus [2]; Zugstreben im Zustand II.6_{e-i}

Auch hier ist darauf hinzuweisen, dass die Druckstrebe unterhalb des kritischen Stegrisses - dieser Bereich wird im Folgenden als **Subsystem** bezeichnet - offensichtlich den etwa vertikal ausgerichteten Teil des kritischen Stegrisses überdrückte und den Ansatzpunkt des ersten Risses (in Folge von T_{w6a}) an einem Knickpunkt des kritischen Stegrisses bestimmte. Weiterhin kann hier in Übereinstimmung mit den entsprechenden Analysen für den Biegebereich festgestellt werden, dass der zweite Riss (in Folge von T_{w6b}) so verläuft, dass die resultierende Zugkraft durch den Kreuzungspunkt des ersten Risses mit der Biegezugbewehrung geht.

Damit kann folgende Definition abgeleitet werden:

Zustand II.6_{e-i}: Die einzig verbleibende Druckstrebe stützt sich am Fußpunkt des kritischen Stegrisses auf dem Zuggurt ab. Der Zuggurt reißt durch diese starke Zusatzbeanspruchung reißverschlussartig außerhalb des kritischen Stegrisses vom Steg ab, die Druckstrebe wird unwirksam.

1.6 Zustand II.7_{e-i}

Wenn die Rissbildung des Zustands II.6_{e-i} abgeschlossen ist, verbleibt als Resttragfähigkeit für die gesamte Belastung nur noch das Sprengwerk, das ja im vorliegenden Fall von Anfang an - zunächst geringfügig - an der Lastabtragung beteiligt war. In diesem **Zustand II.7_{e-i}** ist jedoch das Sprengwerk bereits entscheidend geschwächt, da einerseits der kritische Stegriss etwa bis zur Achse des geneigten Druckgurtes vorgedrungen war und andererseits die Dicke des Druckgurtes durch den kritischen Stegriss erheblich verringert wurde. Entsprechend gibt es hier zwei unterschiedliche Versagensmöglichkeiten: Entweder führt die in Folge des kritischen Stegrisses exzentrische Belastung des geneigten Druckgurtes zu Biegezugspannungen an der Balkenoberseite und die daraus resultierenden Risse führen zum Versagen - oder aber die Balken versagen im stark eingeschnürten Druckzonenbereich. Die erstgenannte Versagensvariante mit Rissen etwa rechtwinklig von der Balkenoberseite zum kritischen Stegriss ist bei den Balken 6 (in beiden Trägerhälften gleichzeitig!), 7/1 und 8/1 festzustellen. Bei den Balken 7/1 und 8/1 ist gleichzeitig der Ansatz für das Versagen der Druckzone zwischen den Lasteinleitungsstellen zu erkennen. Daraus kann gefolgert werden, dass beide Versagensarten somit auf etwa dem gleichen Belastungsniveau statt finden. Bei den Balken 4 (linke Hälfte) und 5 sind die kritischen Stegrisse so weit in die Druckzone vorgedrungen, dass diese jeweils versagte.

Bei den Balken 5 bis 8/1 ist darüber hinaus noch zu erkennen, dass sich der kritische Stegriss vor dem endgültigen Versagen des Systems über den Lasteinleitungspunkt hinweg weiter entwickelt hatte. Dieser letzte Abschnitt des kritischen Stegrisses hat nun gar nichts mehr mit der einwirkenden Querkraft zu tun, sondern ist allein auf die Wirkung der großen Querkzugspannungen (= Spaltzug!) der Druckzone zurückzuführen. Dies geht auch daraus hervor, dass diese Rissabschnitte stets parallel zum gedrückten Rand verlaufen.

Besonders bemerkenswert ist hierbei auch, dass jeweils unter der eingeleiteten Last sehr große Druckspannungen wirken, die den Querkzugspannungen überlagert sind. Dennoch ist der Einfluss der Querkzugspannungen so groß, dass sie die Druckzone sogar in diesem Bereich „spalten“.

Somit kann definiert werden:

Zustand II.7_{e-i}: Es verbleibt als Resttragfähigkeit für die gesamte Belastung nur noch das Sprengwerk, das ja im vorliegenden Fall von Anfang an - zunächst geringfügig - an der Lastabtragung beteiligt war. Das Versagen tritt entweder auf Grund der exzentrischen Belastung des geneigten Druckgurtes oder auf Grund einer Überbeanspruchung der stark eingeschnürten Druckzone ein.

Es muss jedoch an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass diese sieben Stufen der Rissentwicklung nicht immer in allen Details exakt gleichartig verlaufen. (So stellen die am Balken 6 festgestellten Risse in Richtung der Stegdruckstreben eher eine Ausnahme dar.) Dies ist nicht weiter verwunderlich, wenn man bedenkt, dass Beton - vor Allem in Hinblick auf die hier maßgebende Zugfestigkeit - alles Andere als eine homogene Materie darstellt. Ungeachtet dessen sind jedoch die maßgeblichen Stufen der schrittweise auf einander folgenden Tragsysteme dennoch prinzipiell immer dieselben.

2. Ergänzende FE-Berechnungen

Im Folgenden werden für die qualitative Betrachtung der D_{e-i} -Bereiche ergänzende FE-Berechnungen vorgestellt. Dazu werden, um beim bisher betrachteten Beispiel zu bleiben, die geometrischen Verhältnisse und die Rissbildung des Balkens 6 aus [2] verwendet. Bei den durchgeführten FE-Berechnungen wurde bewusst auf Programme verzichtet, die das nichtlineare Verhalten des Betons abbilden können. Die händische Modellierung von Rissen in Form von Öffnungen stellt sicher, dass das vorgegebene Rissbild nachvollziehbar auch tatsächlich abgebildet wird und nicht mit Rissbildern gearbeitet wird, deren Verlauf möglicherweise an programmtechnische Festlegungen gebunden sein könnte. Allerdings werden dabei vereinzelt, auf Grund der sehr kleinen Elemente, sehr große Kerbspannungen errechnet.

Schon im Zustand II.1 sind, wie das *Bild 6* zeigt, zwischen den noch relativ kurzen Rissen bereits deutlich die geneigten Zug- und Druckstreben im Stegbereich zu erkennen. Unrealistisch stark sind hier die Zugspannungskonzentrationen an den Risswurzeln ausgebildet, die sich in Wirklichkeit auf Grund des nicht linearelastischen Verhaltens dieser Zonen so nicht einstellen werden.

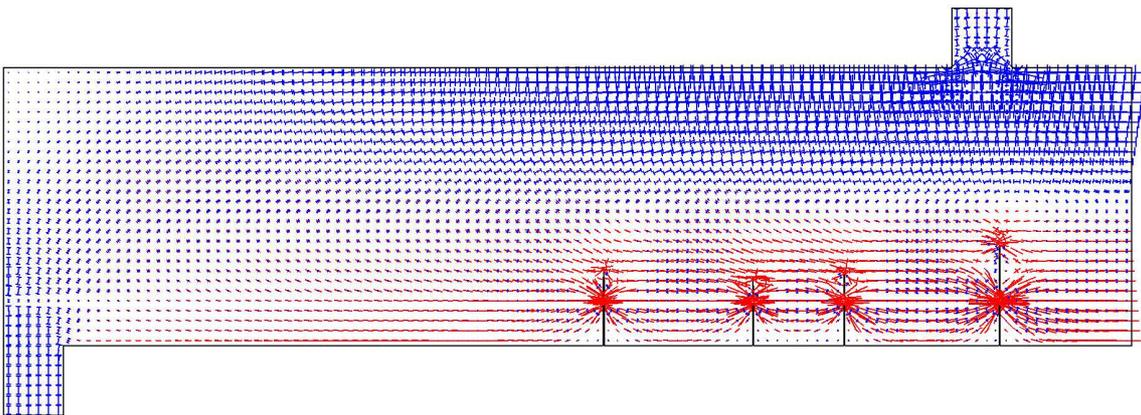


Bild 6: Hauptspannungen des Balkens 6 (linke Hälfte) aus [2] im Zustand II.1

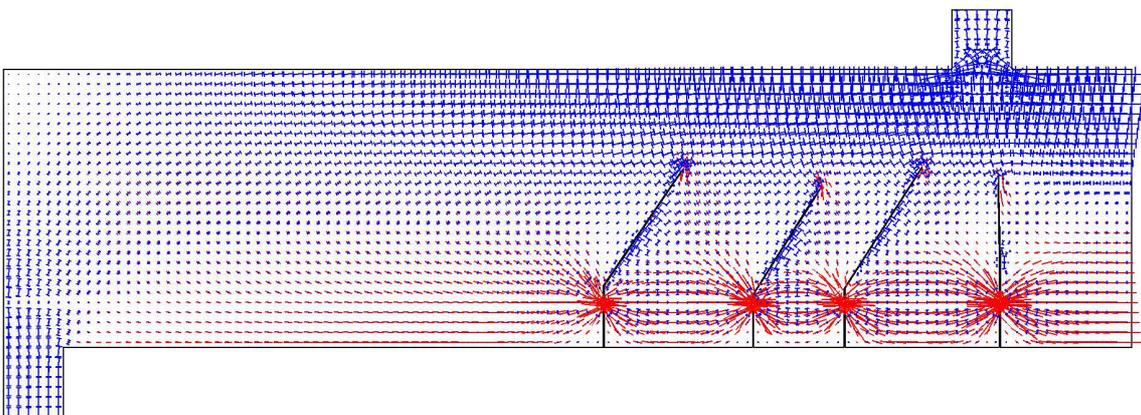


Bild 7: Hauptspannungen des Balkens 6 (linke Hälfte) aus [2] im Zustand II.2

Im Zustand II.2 sind die Stegzug- und -druckstreben zwischen den Rissen erkennbar stärker ausgeprägt als zuvor.

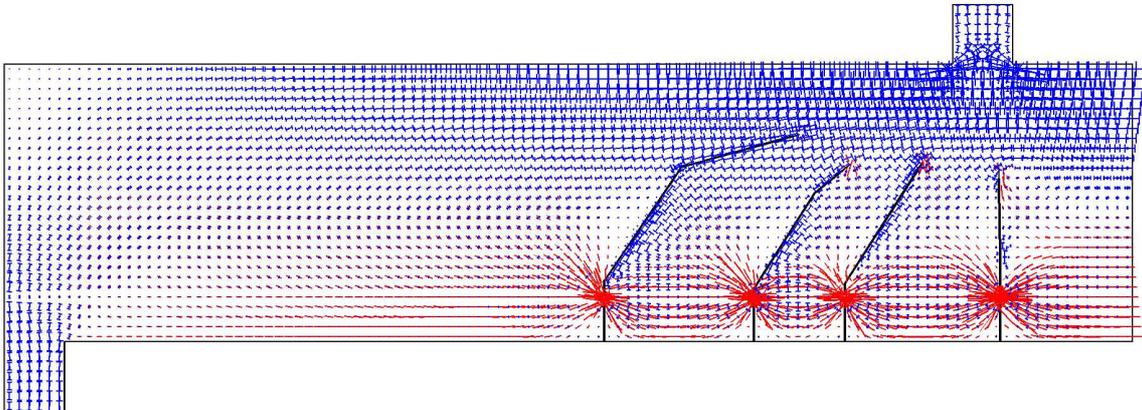


Bild 8: Hauptspannungen des Balkens 6 (linke Hälfte) aus [2] im Zustand II.4

Im Zustand II.4 haben die Stegbereiche zwischen den Rissen auf Grund der fortgeschrittenen Rissentwicklung praktisch keine Möglichkeit mehr, Zugstreben auszubilden, die in der Druckzone verankert sind. Dennoch ist deutlich erkennbar, dass sich geneigte Stegzugstreben ausbilden. Sie finden ein Gleichgewicht, in dem sie die Stegdruckstreben unter den jeweiligen Rissen umlenken.

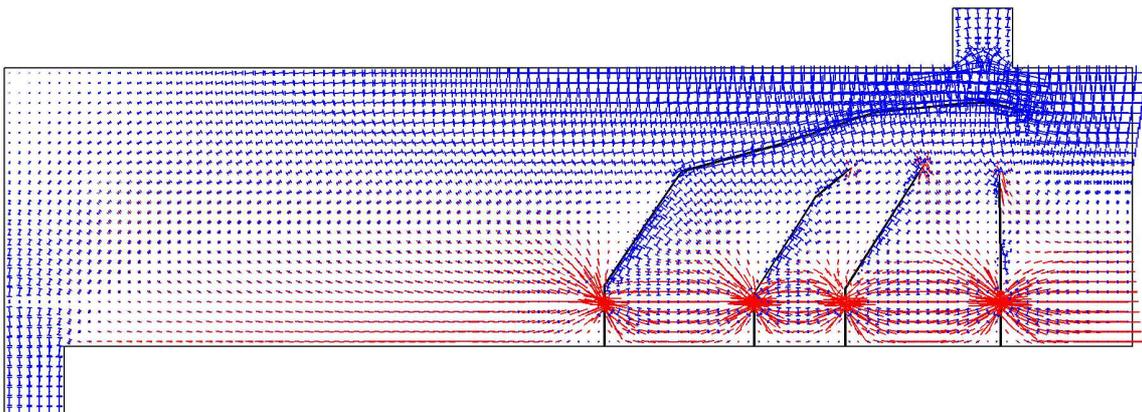


Bild 9: Hauptspannungen des Balkens 6 (linke Hälfte) aus [2] im Zustand II.6

In der Darstellung des Zustandes II.6 ist nun gut zu erkennen, wie sich im Subsystem unter dem kritischen Stegriss ein Druckgurt bildet und wie das Subsystem links des kritischen Stegrisses in einer etwa unter 60° geneigten Zugstrebe ein Auflager findet. Der Druckgurt des Subsystems verläuft nicht etwa geradlinig, sondern folgt der Geometrie des kritischen Stegrisses. Die dafür erforderlichen Umlenkkräfte sind im Bereich des Zuggurtes verankert.

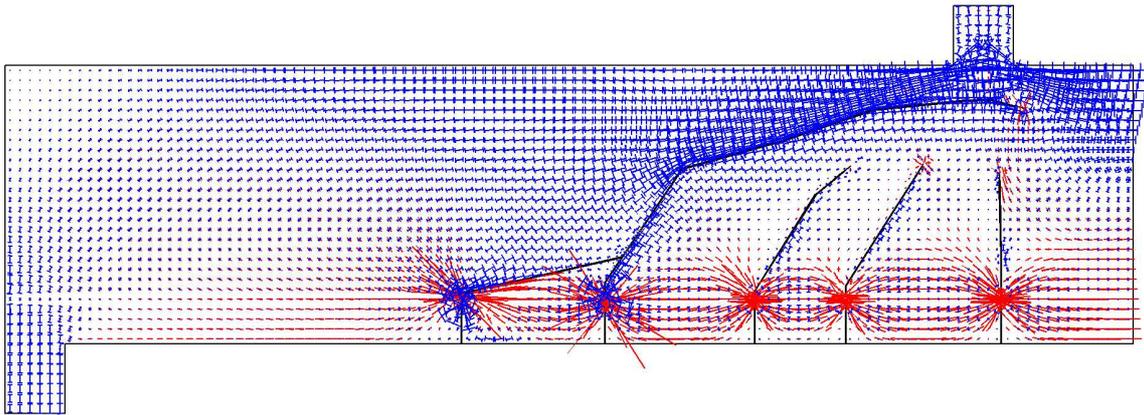


Bild 10: Hauptspannungen des Balkens 6 (linke Hälfte) aus [2] im Zustand II.7

Versagt nun die aufgehängende Zugstrebe neben dem kritischen Riss, wie dies im *Bild 10* für den Zustand II.7 modelliert wurde, wird entsprechend auch das Subsystem entlastet. Statt der bisherigen kräftigen Druckstrebe unter dem kritischen Riss ist nunmehr die sprengwerkartige Druckstrebe über dem kritischen Riss ausgebildet. Das der FE-Berechnung zu Grunde liegende linearelastische Materialverhalten hat zur Folge, dass in der Berechnung das Tragverhalten im Kreuzungsbereich der Risse mit der Biegezugbewehrung erheblich überschätzt wird, so dass sich die dort angezeigten Spannungskonzentrationen in Wirklichkeit nicht so stark ausbilden können.

Die vergleichende FE-Berechnung kann also als gute Bestätigung der aus den Rissbildern abgeleiteten physikalischen Hintergründe des Tragverhaltens in D_{e-i} -Bereichen gewertet werden.

3. Bemessungsmodell für D_{e-i} -Bereiche

Gemäß den aufgezeigten Zusammenhängen stehen Einzellasten, die im D_{e-i} -Bereich angreifen, in direkter Wechselwirkung mit dem Endauflager, und zwar dahin gehend, dass ca. 25 % der Last direkt über eine Druckstrebe zum Auflager geleitet werden.

3.1 Zustand II.1_{e-i}

Vereinfachend wird hier nun davon ausgegangen, dass die restlichen 75 % der Einzellast zunächst über eine unter ca. 45° geneigte Druckstrebe eingeleitet werden. Somit ergibt sich ein vereinfachter Kräfteverlauf entsprechend *Bild 11*. Die unter ca. 45° geneigte Druckstrebe läuft direkt auf einen Kreuzungspunkt eines Biegerisses mit der Biegezugbewehrung zu, wird durch das Verbundtragwerk des Zuggurtes über den Biegeriss übertragen und erhält ihr Gleichgewicht über eine schräge Stegzugstrebe (T_w), die in etwa auf den Mittelpunkt der über dem Biegeriss verbleibenden Betonzone zuläuft.

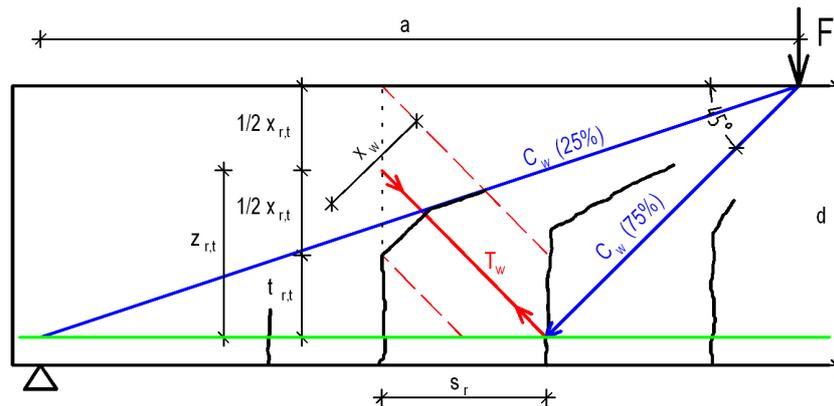


Bild 11: Kraftfluss und Rissentwicklung im D_{e-i}-Bereich

Für die Stegzugstrebe folgt aus der Geometrie, unter der oben beschriebenen Annahme, dass ihr Vertikalanteil 75 % der Einzellast und somit bei reiner Belastung durch Einzellast 75 % der Querkraft V entspricht:

$$T_w = 0,75 \cdot V \cdot \sqrt{1 + \frac{s_r^2}{z_{r,t}^2}} \quad (1).$$

Bei Ansatz eines parabolischen Spannungsverlaufs der Stegzugspannungen über die Breite der schrägen Zugzone x_w und bei Vorgabe einer Bemessungsbetonzugspannung im Steg $f_{ctd,w}$ berechnet sich der Bemessungswert der Riss auslösenden Grenzquerkraft im **Zustand II.1D_{e-i}** zu (vgl. auch [5]):

$$V_{Rd,ct,w,e-i} = \frac{8}{9} \cdot b_w \cdot x_{r,t} \cdot \frac{s_r \cdot z_{r,t}}{s_r^2 + z_{r,t}^2} \cdot f_{ctd,w} \quad (2).$$

Zur ersten Überprüfung der hergeleiteten Zusammenhänge für den Zustand II.1_{e-i} werden nachfolgend die rechte Seite des Balkens 5 sowie die linke Seite des Balkens 7/1 aus [2] untersucht, da hier der aus der Stegzugstrebe im Zustand II.1_{e-i} resultierende Riss jeweils sehr gut abzulesen und auch die Laststufe, die zu diesem Riss geführt hat, angegeben ist. Die Balken haben die Abmessungen $b_w / h / d = 19 / 32 / 27$ cm. Der Rissabstand s_r sowie die Höhe des über dem Biegeriss verbleibenden Betonquerschnitts $x_{r,t}$ werden gemessen und als Bemessungsbetonzugfestigkeit $f_{ctd,w}$ wird die mittlere Betonzugfestigkeit f_{ctm} , die für die Balken ca. 2,9 MN/m² beträgt, angesetzt. Das Eigengewicht der Träger wird näherungsweise vernachlässigt, so dass vereinfachend mit *Glg. (2)* gerechnet werden kann. In den *Bildern 12* und *13* sind die maßgebenden Ausschnitte der Balken 5 und 7/1 mit den unter 45° geneigten Druckstreben sowie den Zugstreben im Zustand II.1_{e-i} und den direkten Druckstreben zum Auflager dargestellt.

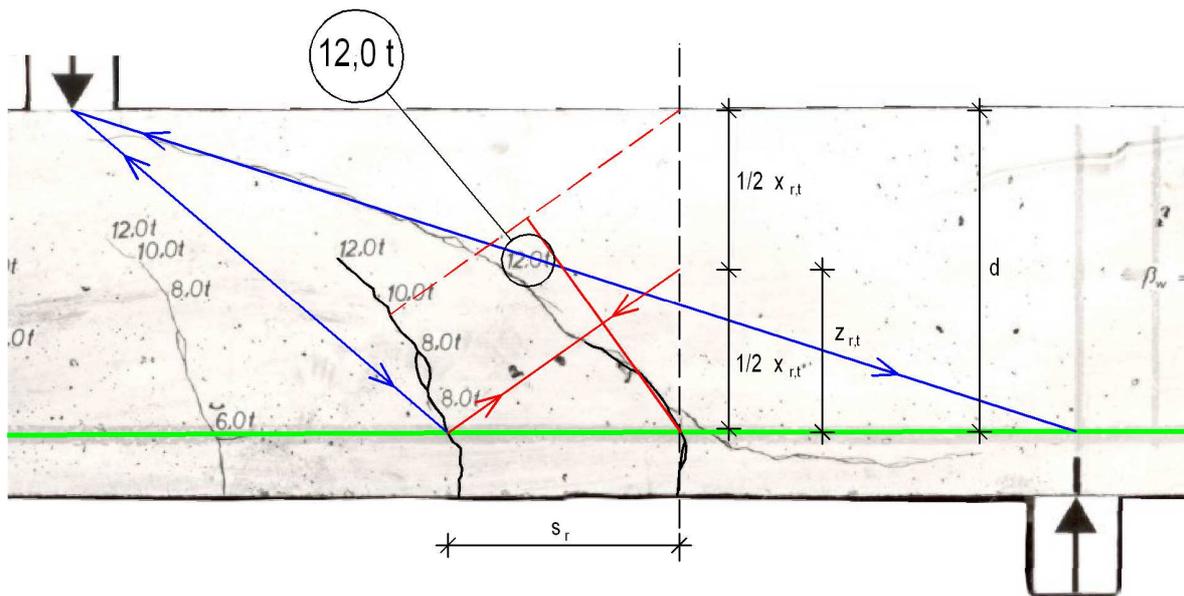


Bild 12: Ausschnitt der rechten Seite des Balkens 5 aus [2]

Für den Balken 5 ergibt sich etwa:

$$s_r = 18 \text{ cm},$$

$$x_{r,t} = 26 \text{ cm}$$

und damit $z_{r,t} = 14 \text{ cm}$.

Somit berechnet sich die aufnehmbare Querkraft im Zustand II.1_{e-i} nach Glg. (2) zu:

$$V_{R,ct,w,e-i} = 61,7 \text{ kN}$$

und würde somit einer Laststufe 12,3 t entsprechen. Wie aus Bild 12 ersichtlich wird, ist am oberen Ende des zum Zustand II.1_{e-i} gehörenden Risses die Laststufe 12,0 t angegeben, was ganz gut der errechneten Laststufe von 12,3 t entspricht.

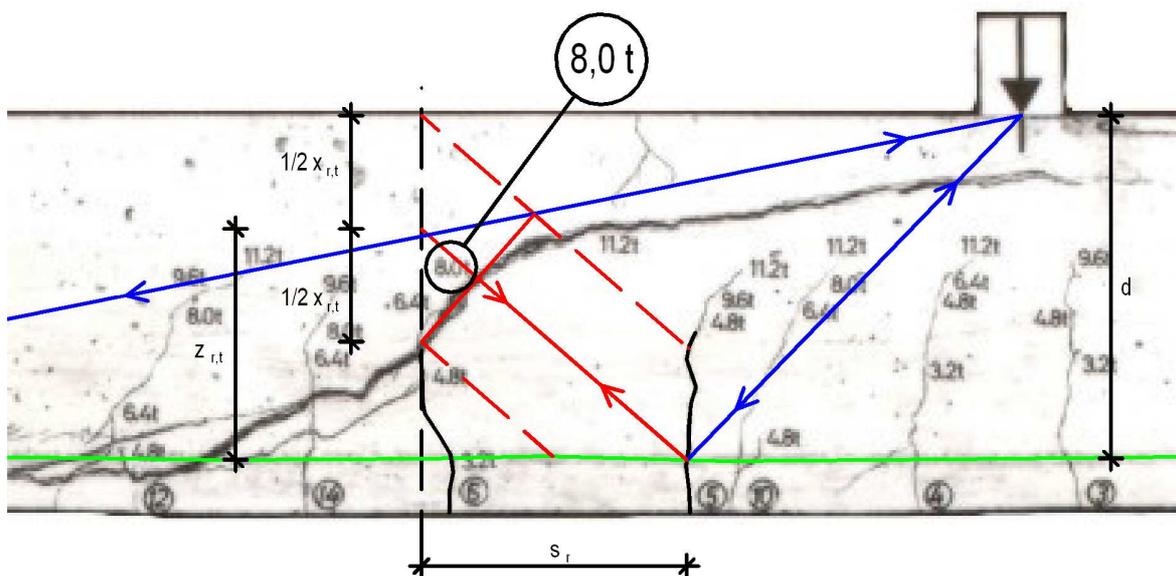


Bild 13: Ausschnitt der linken Seite des Balkens 7/1 aus [2]

Für den Balken 7/1 ergibt sich entsprechend:

$$s_r = 20 \text{ cm},$$

$$x_{r,t} = 18 \text{ cm}$$

und somit $z_{r,t} = 18 \text{ cm}$.

Daraus berechnet sich die aufnehmbare Querkraft, wiederum aus *Glg. (2)*, zu:

$$V_{R,ct,w,e-i} = 43,8 \text{ kN}.$$

Diese würde einer Laststufe 8,8 t entsprechen, und tatsächlich, wie aus *Bild 13* abgelesen werden kann, ist in der Mitte des zum Zustand II.1_{e-i} gehörigen Stegrisses die Laststufe 8,0 t angegeben.

Die hier geführte Untersuchung kann also als erste, gute Bestätigung der oben vorgestellten Bemessungsansätze gesehen werden. Für fundierte Erkenntnisse sind selbstverständlich weitere Versuchsauswertungen an unterschiedlichen Versuchsbalken ohne Stegbewehrung erforderlich.

Auf eine Untersuchung der Tragfähigkeiten in den Zuständen II.2_{e-i} bis II.5_{e-i} wird verzichtet, da diese Zwischenzustände für die Endtragfähigkeit des Tragwerks keine Rolle spielen.

3.2 Zustand II.6_{e-i}

Zur Berechnung der Tragfähigkeit im **Zustand II.6_{e-i}** werden die Bezeichnungen entsprechend *Bild 14* gewählt.

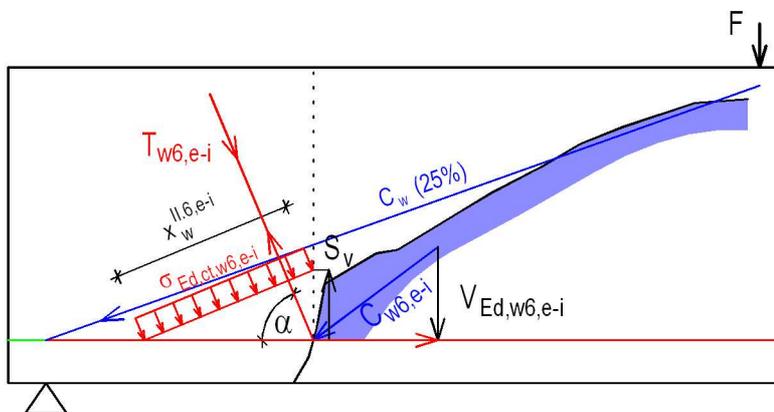


Bild 14: Geometrie, Kräfte und Spannungen im Zustand II.6_{e-i}

Aus der Geometrie ergibt sich:

$$x_w^{II.6,e-i} = \frac{s_v}{\cos \alpha} \quad (3),$$

$$T_{w6,e-i} = \frac{V_{Ed,w6,e-i}}{\sin \alpha} \quad (4)$$

Bei Annahme einer gleichmäßig verteilten Zugspannung über die Breite $x_w^{II.6,e-i}$ folgt:

$$\sigma_{\text{Ed,ct,w6,e-i}} = \frac{V_{\text{Ed,w6,e-i}}}{b_w \cdot s_v \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{V_{\text{Ed,w6,e-i}}}{b_w \cdot s_v \cdot \tan \alpha} \quad (5).$$

Durch Vorgabe eines Bemessungswertes der Betonzugspannung im Steg berechnet sich die aufnehmbare Auflagerkraft des Subsystems somit zu:

$$V_{\text{Rd,ct,w6,e-i}} = b_w \cdot s_v \cdot \tan \alpha \cdot \alpha_b \cdot f_{\text{ctd,w}} \quad (6).$$

Dabei stellt der Faktor α_b einen Verbundbeiwert dar. Er wurde eingeführt, da in [3] dargestellte Untersuchungen gezeigt haben, dass die Art der Biegebewehrung und die damit in engem Zusammenhang stehenden Verbundeigenschaften durchaus Einfluss auf das Stegtragverhalten haben. Allerdings lassen sich auf Grund fehlender Forschungsarbeiten, die diese Einflüsse genauer untersuchen, keine genauen Angaben über diesen Beiwert machen. Hier besteht weiterer Forschungsbedarf.

Wie oben beschrieben ergibt sich für die Neigung der Stegzugstrebe $T_{\text{w6,e-i}}$ für den D_{e-i}-Bereich ca. 60°. In [3] wurde weiterhin abgeleitet, dass der obere Ansatzpunkt des Risses bei ca. $s_v = (h - d) = d_1$ liegt. Damit folgt für den Bemessungswert der aufnehmbaren Auflagerkraft des Subsystems:

$$V_{\text{Rd,ct,w6,e-i}} = 1,75 \cdot b_w \cdot d_1 \cdot \alpha_b \cdot f_{\text{ctd,w}} \quad (7).$$

Berücksichtigt man nun noch, dass bei der Berechnung der vorhandenen Auflagerkraft des Subsystems nur etwa 75 % der Einzellast zu berücksichtigen sind, was heißt, dass der Wert nach *Glg.* (7) mit dem Faktor 1,33 erhöht werden kann, folgt:

$$V_{\text{Rd,ct,w6,e-i}} = 2,3 \cdot b_w \cdot d_1 \cdot \alpha_b \cdot f_{\text{ctd,w}} \quad (8).$$

Bei der Berechnung der vorhandenen Auflagerkraft des Subsystems muss dabei allerdings die komplette Querkraft aus der Einzellast berücksichtigt werden. Da zusätzlich bei einer Belastung mit einer Einzellast der Querkraftverlauf konstant ist, entspricht die aufnehmbare Auflagerkraft des Subsystems nach *Glg.* (8) in diesem Fall auch der aufnehmbaren Querkraft des Tragwerks im Zustand II.6_{e-i}.

3.3 Zustand II.7_{e-i}

Im **Zustand II.7_{e-i}** wird, wie beschrieben, die volle Einzellast über die direkte Druckstrebe zum Auflager abgetragen. Die Abminderung auf 75 % der Last ist hier also nicht mehr zulässig und es ergibt sich ein genäherter Kraftverlauf entsprechend *Bild 15*. Das Tragwerk versagt dann entweder auf Grund der in Folge des kritischen Stegrisses exzentrischen Belastung des geneigten Druckgurts oder aber auf Grund des stark eingeschnürten Druckzonenbereichs unter der Last, vgl. *Abschnitt 1.6*. Da beide Versagensarten auf etwa dem gleichen Belastungsniveau statt finden, wird im Folgenden nur das Versagen der eingeschnürten Druckzone näher untersucht.

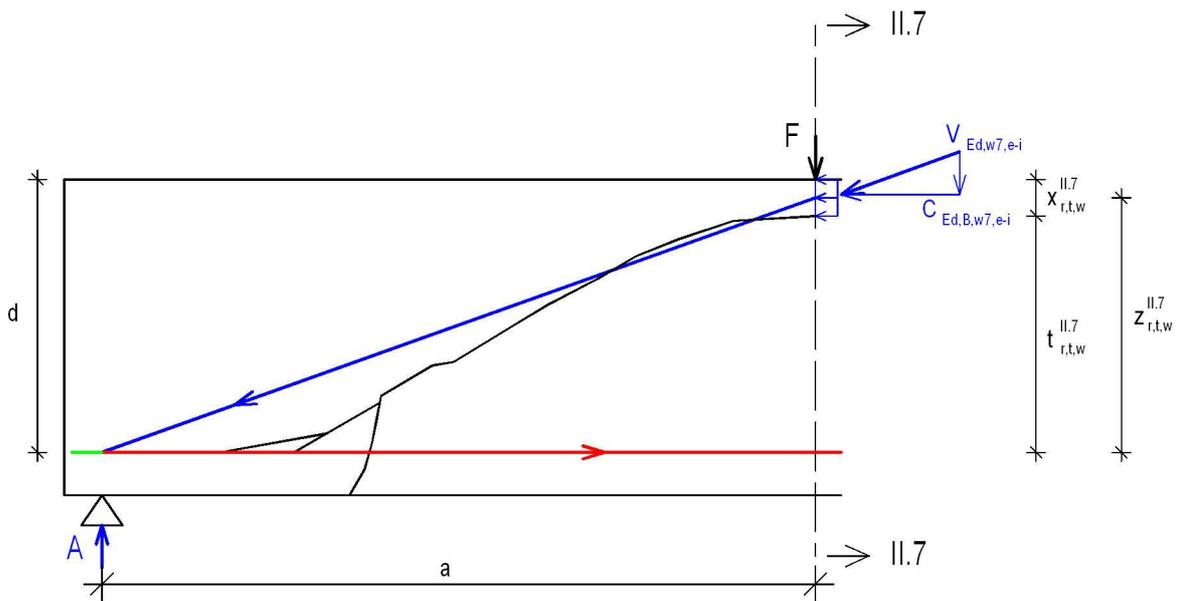


Bild 15: Angenäherter Kraftverlauf im Zustand II.7_{e-i}

Es werden also die Betondruckspannungen im Schnitt II.7 maßgebend, für die an dieser Stelle die geringste Querschnittsfläche für die Lastabtragung zur Verfügung steht. Diese Spannungen können direkt über die randparallel verlaufende Biegedruckkraft $C_{Ed,B,w7,e-i}$ aus dem Moment im Schnitt II.7 berechnet werden.

Bei Annahme einer gleichmäßig verteilten Druckspannung im Schnitt II.7 - dies scheint bei der geringen verbleibenden Druckzonenhöhe $x_{r,t,w}^{II.7}$ oberhalb des kritischen Stegrisses und der in diesem Zustand großen Stauchungen nahe liegend - gilt dann:

$$\sigma_{Ed,c,w7,e-i} = \frac{C_{Ed,B,w7,e-i}}{b_w \cdot x_{r,t,w}^{II.7}} \quad (9)$$

Genau genommen müsste hier die Druckzonbreite, also $b_{f,c}$, eingesetzt werden. Bei den zu Grunde liegenden Rechteckquerschnitten sind jedoch $b_{f,c}$ und b_w gleich groß. Bei profilierten Querschnitten ohne Stegbewehrung, die bislang nicht zulässig sind, muss jedoch davon ausgegangen werden, dass das Tragwerk im (dünneren) Stegbereich versagt. Dafür müssten ggf. entsprechende Zusammenhänge abgeleitet werden.

Nimmt man nun an, dass die resultierende Betondruckkraft $C_{Ed,B,w7,e-i}$ in halber Höhe der Betondruckzone angreift, folgt mit

$$C_{Ed,B,w7,e-i} = \frac{M_{Ed,w7,e-i}}{z_{r,t,w}^{II.7}} \quad (10)$$

mit $M_{Ed,w7,e-i}$ = Moment im Schnitt II.7 (s. Bild 15)

$$\text{und } z_{r,t,w}^{II.7} = d - \frac{1}{2} \cdot x_{r,t,w}^{II.7} \quad (11):$$

$$\sigma_{Ed,c,w7,e-i} = \frac{M_{Ed,w7,e-i}}{b_w \cdot x_{r,t,w}^{II.7} \cdot \left(d - \frac{1}{2} \cdot x_{r,t,w}^{II.7} \right)} \quad (12)$$

Bei Vorgabe eines Bemessungswerts der Betondruckfestigkeit und durch Umstellung ergibt sich daraus der Bemessungswert des aufnehmbaren Moments im Schnitt II.7 und damit - vorausgesetzt, die dafür erforderliche Biegezugbewehrung ist vorhanden - die Tragfähigkeit im Zustand II.7 zu:

$$M_{Rd,w7,e-i} = b_w \cdot x_{r,t,w}^{II.7} \cdot \left(d - \frac{1}{2} \cdot x_{r,t,w}^{II.7} \right) \cdot f_{cd} \quad (13).$$

4. Vergleich mit Versuchsergebnissen

Um eine erste Einschätzung der hergeleiteten Beziehungen im Vergleich zu den tatsächlichen Tragfähigkeiten in den Zuständen II.6_{e-i} und II.7_{e-i} zu erhalten, werden im Folgenden die von *Leonhardt* und *Walther* in [2] vorgestellten Balken 4 bis 8/1 ausgewertet, die alle dem D_{e-i}-Bereich zuzuordnen sind. Der Querschnitt ist bei allen Balken gleich, die Querschnittshöhe beträgt $h = 32$ cm und die Breite $b_w = 19$ cm. Die statischen Nutzhöhen d , die Lastabstände a und die gemessenen, über den kritischen Stegrissen verbleibenden Druckzonenhöhen im Zustand II.7_{e-i}, $x_{r,t,w}^{II.7}$, sind in *Tabelle 1* wiedergegeben. Der Beiwert α_b zur Berechnung der Tragfähigkeit im Zustand II.6_{e-i} nach *Glg. (8)* wird mit $\alpha_b = 1,0$ angenommen, da, wie beschrieben, keine genaueren Erkenntnisse vorliegen. Das Eigengewicht der Träger wird näherungsweise vernachlässigt, das heißt, es wird von einer reinen Belastung mit einer Einzellast ausgegangen. Somit entspricht die aufnehmbare Auflagerkraft des Subsystems im Zustand II.6_{e-i}, $V_{Rd,ct,w6,e-i}$, nach *Glg. (8)* auch der aufnehmbaren Querkraft des Tragwerks. Die Querkrafttragfähigkeit im Zustand II.7_{e-i} kann aus dem aufnehmbaren Moment im Schnitt II.7 nach *Glg. (13)* ermittelt werden. Bei den hier untersuchten Trägern mit Einzellasten entspricht der Schnitt II.7 näherungsweise immer der Stelle der Lasteinleitung, so dass die aufnehmbare Querkraft im Zustand II.7_{e-i}, $V_{Rd,w7,e-i}$, auf Grund des konstanten Querkraftverlaufs folgendermaßen berechnet werden kann:

$$V_{Rd,w7,e-i} = \frac{M_{Rd,w7,e-i}}{a} = \frac{1}{a} \cdot b_w \cdot x_{r,t,w}^{II.7} \cdot \left(d - \frac{1}{2} \cdot x_{r,t,w}^{II.7} \right) \cdot f_{cd} \quad (14).$$

In der *Tabelle 1* sind die rechnerisch aufnehmbaren Querkräfte im Zustand II.6_{e-i}, für $f_{ctk;0.95}$, f_{ctm} und $f_{ctk;0.05}$ als Bemessungsbetonzugfestigkeit, die aufnehmbaren Querkräfte im Zustand II.7_{e-i}, für f_{ck} als Bemessungsbetondruckfestigkeit und die Bruchquerkräfte aus den Versuchen dargestellt. Im *Bild 16* sind diese Ergebnisse nochmals grafisch zusammengefasst, wobei die blauen Säulen die rechnerischen Tragfähigkeiten im Zustand II.6_{e-i} bei Ansatz der unterschiedlichen Betonzugfestigkeiten, die roten Säulen die tatsächlichen Bruchtragfähigkeiten und die grünen Säulen die rechnerischen Tragfähigkeiten im Zustand II.7_{e-i} zeigen.

Tabelle 1: Rechnerische Tragfähigkeit der Balken 4 bis 8/1 aus [2] im Zustand II.6_{e-i} und II.7_{e-i}

Balken	a / d	d [m]	a [m]	x _{r,t,w} II.7 [cm]	f _{ck} (= 0,8*β _w) [MN/m ²]	V _{R,ct,w6,e-i} bei f _{ctk;0,95} [kN]	V _{R,ct,w6,e-i} bei f _{ctm} [kN]	V _{R,ct,w6,e-i} bei f _{ctk;0,05} [kN]	V _{R,w7,e-i} [kN]	V _u Versuch [kN]
4 links	2,5	0,27	0,67	5,8	28,4	79,3	61,0	42,7	112,6	83,2
4 rechts	2,5	0,27	0,67	8,6	28,4	79,3	61,0	42,7	157,2	88,7
5 links	3,0	0,27	0,81	2,1	28,4	79,3	61,0	42,7	36,3	61,5
5 rechts	3,0	0,27	0,81	2,1	28,4	79,3	61,0	42,7	36,3	78,0
6 links	4,1	0,27	1,10	4,0	28,4	79,3	61,0	42,7	49,1	62,0
6 rechts	4,1	0,27	1,10	5,0	28,4	79,3	61,0	42,7	60,1	69,5
7/1 links	4,9	0,28	1,35	4,6	29,8	68,8	52,9	37,0	49,2	63,5
7/1 rechts	kein kritischer Stegriss									
8/1 links	5,8	0,28	1,62	4,2	29,8	68,8	52,9	37,0	37,7	67,0
8/1 rechts	kein kritischer Stegriss									

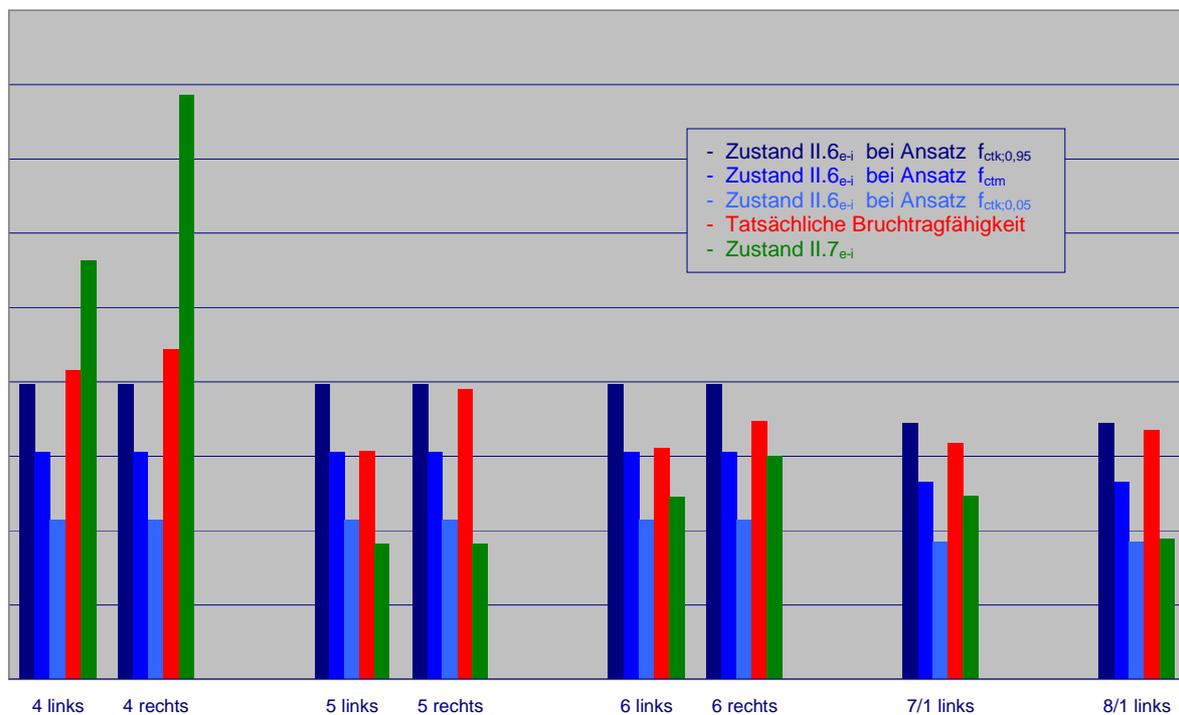


Bild 16: Grafische Darstellung der Tragfähigkeiten im Zustand II.6_{e-i} und II.7_{e-i} der Balken 4 bis 8/1 aus [2]

Wie aus *Tabelle 1* und *Bild 16* deutlich wird, ist bei den Balken 5 bis 8/1 durchweg die Tragfähigkeit im Zustand II.6_{e-i} maßgebend. Die tatsächliche Bruchlast liegt immer zwischen der rechnerischen Tragfähigkeit bei Ansatz der mittleren Betonzugfestigkeit und der

Literatur

- [1] Rojek, R.: Zum Tragverhalten von Stahlbetontragwerken unter auflagernahen Einzellasten.
Forschungsbericht 2009 der Hochschule Augsburg.
- [2] Leonhardt, F. und Walther, R.: Schubversuche an einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung.
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 151, Berlin 1962.
- [3] Rojek, R.: Zur Rissentwicklung in Biegebereichen von Stahlbetontragwerken ohne Stegbewehrung.
Forschungsbericht 2009 der Hochschule Augsburg.
- [4] Tue, N. V. und Pierson, R.: Ermittlung der Rissbreite und Nachweiskonzept nach DIN 1045-1. Beton- und Stahlbetonbau 96, 2001, Heft 5, S. 365 - 372.
- [5] Rojek, R.: Ein Tragmodell für die erste Stegrissstufe in Stahlbetontragwerken ohne Stegbewehrung.
Forschungsbericht 2009 der Hochschule Augsburg.
- [6] Rojek, R.: Zur Rissentwicklung und neuartige Tragmodelle von Stahlbetontragwerken ohne Stegbewehrung unter Einzellasten in der Nähe von Endauflagern.
Forschungsbericht 2009 der Hochschule Augsburg.